Prednáška 3

Na deriváciu krivky $\boldsymbol{\gamma} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ sa môžeme pozerať ako na novú (vektorovú) funkciu z $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, ktorá nám vlastne definuje dotykový vektor. Keďže ide o deriváciu "dráhy", ktorú prejde hmotný bod, zložky tohto vektora nám vyjadrujú zložky vektora okamžitej rýchlosti v danom čase, $\boldsymbol{\gamma}'(t) = \mathbf{v}(t)$. Veľkosť daného vektora je teda (okamžitou) rýchlosťou, $v(t) = \|\boldsymbol{\gamma}'(t)\| = \|\mathbf{v}(t)\|$. Ak navyše $\mathbf{v}(t) \neq 0$, tak označme $\mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)}$ jednotkový dotykový vektor. Podobne je nám asi už známe, že časová zmena rýchlosti sa nazýva zrýchlenie. A teda máme vektor (okamžitého) zrýchlenia pohybujúceho sa hmotného bodu definovaný ako $\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\gamma}''(t)$ a zároveň aj veľkosť (okamžitého) zrýchlenia $a(t) = \|\mathbf{a}(t)\|$.

Veta 3.0.1.

Nech funkcie $\mathbf{f},\ \mathbf{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ \ h : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ sú diferencovateľné (na rovnakej množine), potom pre násobenie skalárom, súčet, skalárny súčin a vektorový súčin platí

(a) $(h\,\mathbf{g})' = h'\,\mathbf{g} + h\,\mathbf{g}'$

(b) $(\mathbf{f} + \mathbf{g})' = \mathbf{f}' + \mathbf{g}'$

(c) $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{g}'$

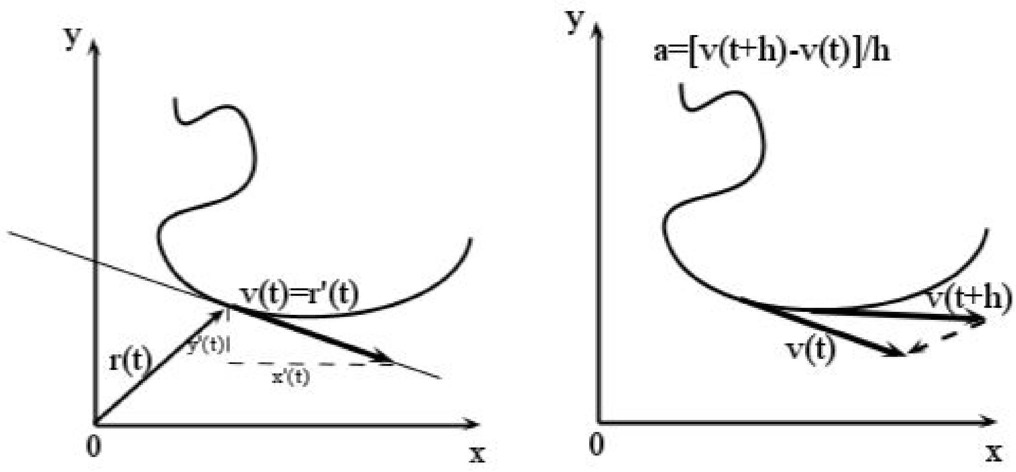
(d) $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \mathbf{g}'$

Poznámka 3.0.2.

Je dobre si rozmyslieť, ako sú definované jednotlivé algebraické operácie pre vektorové funkcie. V prípade vektorového súčinu si treba dať pozor na komutativitu.

Problém 3.0.3.

Platí $(\mathbf{f} \times \mathbf{g})' = \mathbf{f}' \times \mathbf{g} - \mathbf{g}' \times \mathbf{f}$?



(a) Vektor rýchlosti v $\mathbb{R}^2$ (b) Diferencia rýchlosti v $\mathbb{R}^2$

Obr. 3.1: Derivácie v 2D

Je zrejmé, že $\mathbf{v}(t) = v(t)\frac{\mathbf{v}(t)}{v(t)} = v(t)\mathbf{u}(t)$. Teda $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = v'\mathbf{u} + v\mathbf{u}'$.

Poznámka 3.0.4.

Ak $\mathbf{u}' = 0$, tak $\mathbf{a}$ má rovnaký smer ako pohyb. Ak Ak $\mathbf{u}' \neq 0$, tak

$$\mathbf{a} = v'\mathbf{u} + v\|\mathbf{u}'\|\mathbf{a_n} = \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_c,$$

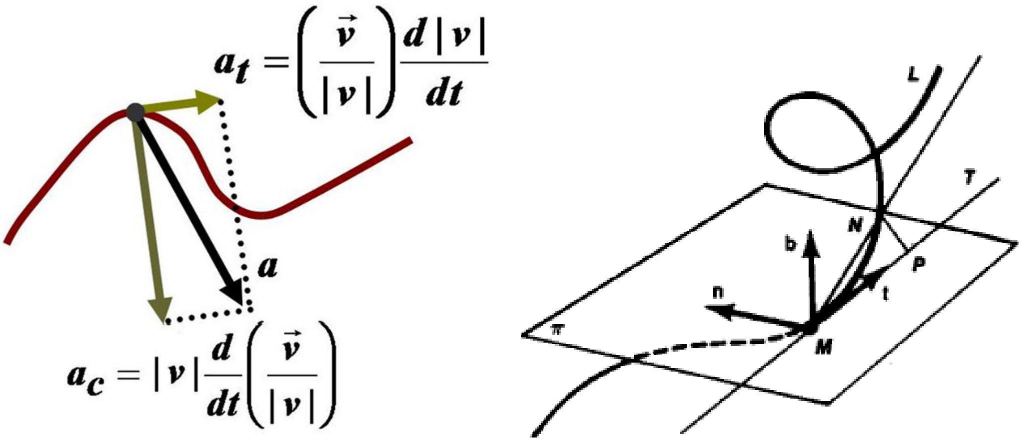
kde $\mathbf{a}_n = \frac{\mathbf{u}'}{\|\mathbf{u}'\|}$. Ide o reprezentáciu zrýchlenia ortonormálnym párom.

Okamžité zrýchlenie má smer zmeny rýchlosti. Teda zrýchlenie má vždy dotykovú zložku $\mathbf{a}_t$, a normálovou zložku $\mathbf{a}_n$. Vektor zrýchlenia nám z Newtonovho zákona sily dáva vektor sily pôsobiaci na časticu, $\mathbf{F}(t) = m\,\mathbf{a}(t)$, kde m je hmotnosť danej častice.

Lema 3.0.5.

Dotykové a normálové zrýchlenie sú ortogonálne.

Neinflexný je taký bod, v ktorom sú vektory prvej a druhej derivácie lineárne nezávislé.



(a) Ortogonálny pár zrýchlenia. (b) Oskulačná rovina.

Obr. 3.2: Frenetove-Serretove vektory.

Definícia 3.0.6.

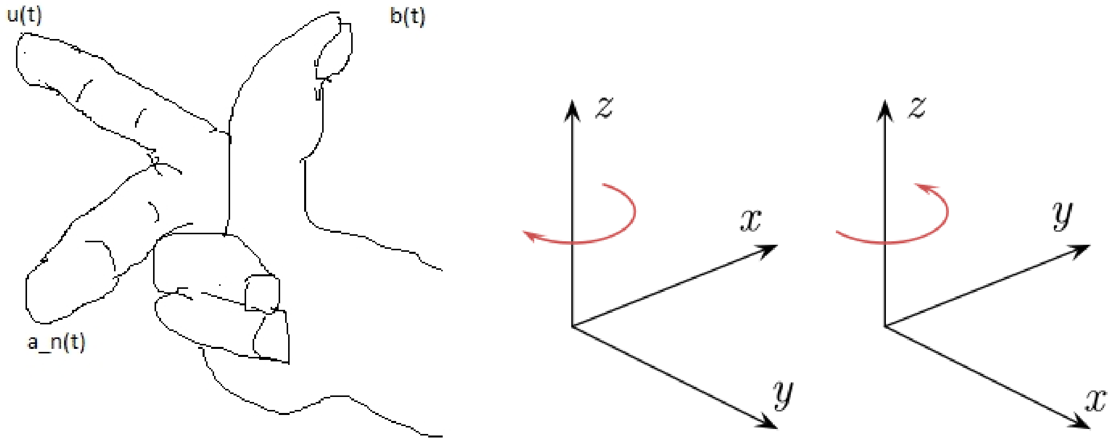
Nech K je krivka určená parametrizáciou $\mathbf{P}(t), t \in I \subset \mathbb{R}$ Nech je na krivke daný neinflexný bod $\mathbf{P}(t_0)$. Rovinu určenú bodom $\mathbf{P}(t_0)$ a smerovými vektormi $\mathbf{P}'(t_0)$ a $\mathbf{P}''(t_0)$ nazývame oskulačnou rovinou (hlavná dotyková rovina) ku krivke K v bode $\mathbf{P}(t_0)$.

Uvažujme teraz o inej rovine, viď obrázok 3.2(b): Nech π je rovina prechádzajúca dotyčnicou ku krivke K v neinflexnom bode $M = \mathbf{P}(t_0)$ a iným bodom krivky $N = \mathbf{P}(t)$. Pre t blížiace sa k t_0 sa N blíži k M a rovina π sa otáča okolo dotyčnice. Limitnou polohou roviny π je oskulačná rovina krivky v bode M. Podľa tejto úvahy teda môžeme oskulačnú rovinu priestorovej krivky v bode M chápať ako takú rovinu, ktorá je v tomto bode ku krivke "najtesnejšie priložená". Aby krivka pre parameter z okolia t_0 "mohla byť planárnou, tak by musela ležať "práve v oskulačnej rovine bodu M. Je to vlastne limitná poloha roviny, ktorá prechádza troma súmedznými (nekonečne blízkymi) bodmi krivky.

Ak $\mathbf{r} = [x, y, z]$ je označenie pre polohový vektor jej ľubovoľného bodu, potom vektorová rovnica oskulačnej roviny je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{p}(t_0)) \cdot (\dot{\mathbf{p}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)) = 0.$$

Priamo z defnície plynie, že táto rovina obsahuje dotyčnicu ku krivke v bode $\mathbf{P}(t_0)$. Normála, ktorá leží v oskulačnej rovine sa nazýva hlavná normála priestorovej krivky a normála kolmá k oskulačnej rovine nazývame binormála.



(a) Pravidlo pravej ruky.

(b) Ľavo(pravo)-točivý systém súradníc.

Obr. 3.3: Znamienková konvencia.

Definícia 3.0.7.

Binormála (normála oskulačnej roviny) je definovaná ako $\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \mathbf{a}_n$. Trojica $\mathbf{u}, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ (vzájomne kolmých vektorov) tvorí tzv. prirodzenú sústavu ôs krivky.

V matematike a fyzike je pravidlo pravej ruky bežná mnemotechnická pomôcka, ktorá stanovuje znamienkovú konvenciu pre vektory v pravotočivom súradnicovom systéme (stanovenie kladného smeru pohybu - pri voľbe troch na seba kolmých vektoroch sú 2 možnosti). Jedna jej podoba sa používa v situáciách, kde sa vektor priraďuje určitej rotácii telesa, tekutiny alebo magnetického poľa. Na druhú stranu pokiaľ poznáme vektor danej rotácie, s pomocou pravidla pravej ruky určíme smer rotácie. Prsty pravej ruky sú ohnuté a ukazujú v smere pohybu alebo magnetického poľa. Palec ukazuje smer vektora.

Prirodzená parametrizácia má veľký význam pri teoretických úvahách. Výhodou je, že každá regulárna krivka môže byť reparametrizovaná prirodzene, teda dĺžkou oblúka medzi dvoma bodmi na krivke. Pri konkrétnom počítaní ju však nevieme vždy určiť, napr. pri jednoducho zadanej krivke (t, t^2, t^3), $t \in \mathbb{R}$ dostávame špeciálnu funkciu, tzv. eliptický integrál.

Definícia 3.0.8.

Parametrizáciu krivky $\gamma : [a, b] \to X$ nazývame prirodzená (s jednotkovou rýchlosťou), ak pre ľubovoľné $t_1, t_2 \in [a, b]$ platí $l(\gamma|_{[t_1,t_2]}) = |t_2 - t_1|$.

Príklad 3.0.9.

Na krivke

$$\mathbf{p}(t) = [r\cos t, r\sin t, ct], \ t \in \mathbb{R}, r > 0, c \neq 0$$

zavedieme nový parameter, ktorý je oblúkom. Vypočítame prvú deriváciu podľa všeobecného parametra t

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = [-r\sin t, r\cos t, c].$$

Dĺžka danej krivky je

$$l(t) = t\sqrt{r^2 + c^2} := s(t), \qquad t \in (-\infty, \infty).$$

K funkcii $s(t)$ vypočítame inverznú funkciu

$$t = \frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \qquad s \in (-\infty, \infty).$$

Odtiaľ vyplýva, že hľadaná vektorová rovnica, v ktorej parameter s je oblúkom, má tvar

$$\mathbf{p}(s) = \left[r\cos\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, r\sin\frac{s}{\sqrt{r^2 + c^2}}, \frac{cs}{\sqrt{r^2 + c^2}} \right].$$

Lema 3.0.10.

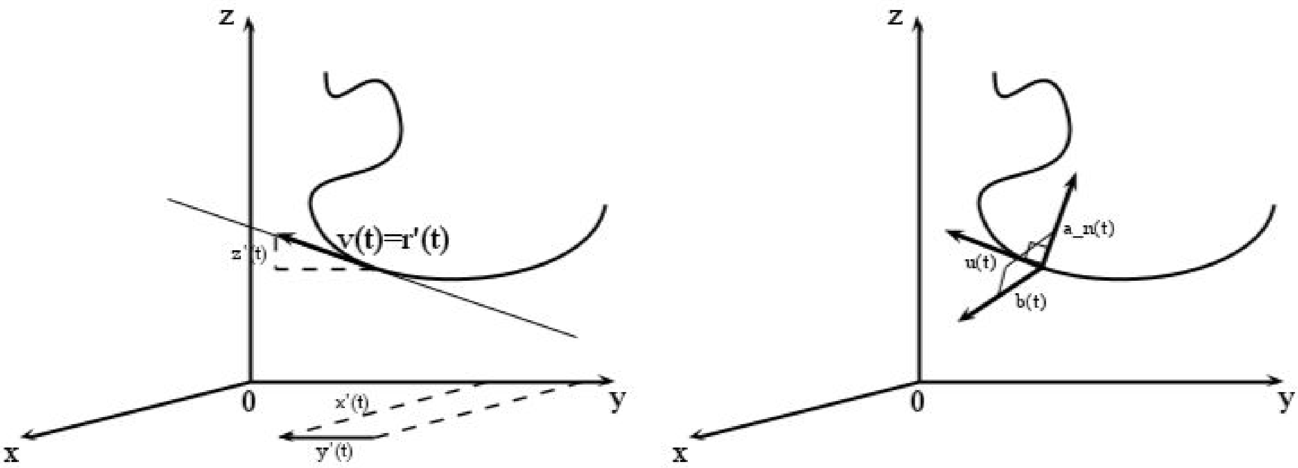
Parametricky danú krivku môžeme prirodzene reparametrizovať vtedy a len vtedy keď je regulárna.

Jednou z dôležitých vlastností kriviek je ich zakrivenie. To má peknú geometrickú interpretáciu. Existuje kružnica v oskulačnej rovine tangenciálna ku krivke $\gamma(s)$, ktorej Taylorov rad druhého rádu v bode dotyku sa zhoduje s Taylorovým radom druhého rádu krivky $\gamma(s)$. Túto kružnicu nazývame oskulačná kružnica. Zakrivenie je vlastne veľkosť zrýchlenia.

Definícia 3.0.11.

Krivosť (kurvatúra) C^2 krivky danej prirodzenou parametrizáciou definujeme ako $\kappa(s) = \|\mathbf{u}'(s)\|$. Hodnotu $\frac{1}{\kappa}$ nazývame polomer krivosti.

Znak derivácie znamená deriváciu podľa prirodzeného parametra s (vyjadrujúci dĺžku oblúka).



(a) Vektor rýchlosti v $\mathbb{R}^3$

(b) Zložky vektora zrýchlenia

Obr. 3.4: Derivácie v 3D

Lema 3.0.12.

Pre parametricky danú C^2 krivku $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ $\left((x')^2 + (y')^2 \neq 0\right)$ je $\kappa(t) = \frac{x'y''-y'x''}{((x')^2+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}$. Pre C^2 krivku danú explicitne $y = f(x)$ je $\kappa(x) = \frac{f''}{(1+(f')^2)^{\frac{3}{2}}}$.

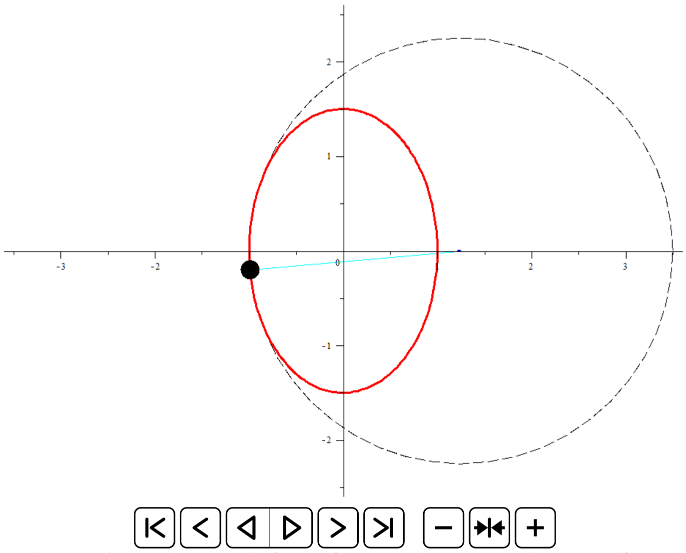
Lema 3.0.13.

Pre parametricky danú C^2 krivku $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ $(\mathbf{r}' \neq 0)$ je $\kappa(t) = \frac{\|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}$.

Zakrivenie priestorovej krivky sa nedá popísať iba jej prvou krivosťou, je potrebné ešte charakterizovať stupeň priestorového "skrútenia". Pri pohybe bodu po regulárnej krivke sa mení poloha oskulačnej roviny v tomto bode. čím viac sa v okolí tohto bodu krivka odchyľuje z oskulačnej roviny v tomto bode, tím má väčšiu druhú krivosť (krútivosť alebo torziu). Preto za mieru priestorového skrútenia krivky v danom bode zoberieme limitnú hodnotu pomeru uhla medzi oskulačnými rovinami v bodoch M, N (obr. 3.2(b)) k dĺžke oblúka medzi týmito bodmi v prípade, že sa táto dĺžka blíži k nule.

Definícia 3.0.14.

Torziu $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ krivky danej prirodzenou parametrizáciou definujeme (v neinflexných bodoch) ako $\mathcal{T} = -\mathbf{a_n} \cdot \mathbf{b}'$.



Obr. 3.5: Polomer krivosti a evolúta (modrou) elipsy.

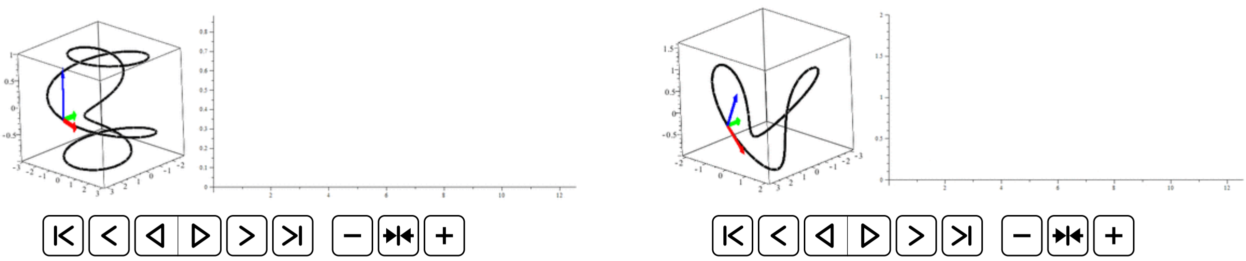
Záporné znamienko je vec konvencie a vedľajší produkt historického vývoja pojmu a znak derivácie znamená deriváciu podľa prirodzeného parametra s (vyjadrujúci dĺžku oblúka).

Lema 3.0.15.

Ak je $C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ krivka definovaná parametrizáciou $\mathbf{p}$, potom jej torziu v neinflexnom bode t_0 vypočítame ako

$$\mathcal{T}(t_0) = \frac{(\mathbf{p}'(t_0) \times \mathbf{p}''(t_0)) \cdot \mathbf{p}'''(t_0)}{\|\mathbf{p}'(t_0) \times \mathbf{p}''(t_0)\|^2}.$$

Torzia vlastne meria krútivosť binormály. čím je väčšia tým rýchlejšie sa tento vektor krúti okolo osi danej dotykovým vektorom. Rovinné krivky majú zrejme nulovú torziu. Nasledujúce vzťahy popisujú kinematické vlastnosti častice, ktorá sa pohybuje pozdĺž hladkej krivky v Euklidovskom priestore $\mathbb{R}^3$, alebo geometrické vlastnosti krivky samotnej nezávisle na akomkoľvek pohybe.



Obr. 3.6: Torzia (modrou) a krivosť (zelenou) krivky $\{(\cos qt+2)\cos pt, (\cos qt+2)\sin pt, -\sin qt\}$ - uzol anuloidu.

Veta 3.0.16 (Frenetove-Serretove vzorce)**.**

Nech $\mathbf{r} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ je regulárna dostatočne hladká krivka, potom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{a}_n\\ \mathbf{b}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{a}_n\\ \mathbf{b}\end{bmatrix},$$

respektíve

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{a}_n\\ \mathbf{b}\end{bmatrix} = \|\mathbf{r}'\|\begin{bmatrix}0 & \kappa & 0\\ -\kappa & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \mathbf{a}_n\\ \mathbf{b}\end{bmatrix},$$

kde κ je krivosť a τ torzia krivky.

Všimnime si, že matica v predchádzajúcej vete je antisymetrická, t.j. je to taká štvorcová matica, že $-A = A^{\mathsf{T}}$. Navyše priamym dôsledkom vzťahov v predchádzajúcej vete je fakt, že každá regulárna hladká krivka v $\mathbb{R}^3$ s konštantnou krivosťou a nulovou torziou je časť kružnice.